



MAT WAJIB BAB 1-5

KATA PENGANTAR

Hai Kilaters!

Wah kerasa banget ya, habis ini udah mau PAS. Tapi tenang aja kilaters! Team Kilat kembali dan akan menemani kamu sepanjang menghadapi PAS ini, dengan Rangkuman Kilat dan Tutor Kilat. Bahannya banyak? Bukan masalah! Selama kita yakin, kita pasti bisa.

Pada Rangkuman ini, kami sudah menyesuaikan materinya dengan kisi-kisi yang ada. Rangkuman ini hanya berisikan rumus saja. Untuk latihan soal, bisa mengerjakan dari lampiran yang diberikan oleh guru Matematika yang bersangkutan.

Maafkan Team Kilat pada Rangkuman kali ini, karena materinya tidak lengkap. Kami sedang ketetran, mohon maaf atas ketidaknyamanannya

Perlu diketahui bahwa **Rangkuman Kilat bukan berasal dari guru**. Jadi, gunakanlah rangkuman ini sebagai sarana/fasilitas untuk mendukung proses pembelajaranmu. Jangan jadikan rangkuman ini sebagai satu-satunya peganganmu.

Jika Kilaters ada pertanyaan, saran, kritik, pendapat, atau apapun mengenai Rangkuman Kilat ini, kalian dapat menghubungi *contact person* yang tertera di paling bawah setiap halaman. Akhir kata, selamat belajar dan sukses selalu!

25 November 2020,

Team Kilat

**TEAM
KILAT**



JUJU. / ALGORYTHM



CYNN / XNYSZ



KAK HARTO / MARKOVNIKOV



CENTRINO / NERDSQUARED

MATRIKS

1. Definisi Matriks

Matriks adalah susunan sekumpulan bilangan dalam bentuk persegi panjang yang diatur menurut baris dan kolom.

2. Macam Matriks

a. Matriks baris

Matriks yang hanya terdiri dari satu baris ($1 \times n$)

b. Matriks kolom

Matriks yang hanya terdiri dari satu kolom ($n \times 1$)

c. Matriks bujur sangkar

Matriks yang banyak barisnya sama dengan banyak kolom ($n \times n$)

d. Matriks identitas

Matriks bujur sangkar yang elemen-elemen pada diagonal utama adalah 1, elemen yang lain adalah 0

e. Matriks nol

Matriks yang semua elemennya 0

f. Matriks transpose

Matriks yang diperoleh dengan cara menukar baris dan kolom suatu matriks menjadi kolom dan baris.

3. Operasi Matriks

a. Penjumlahan matriks

Dua matriks atau lebih dapat dijumlahkan jika ordonya sama. Cara menjumlahkan; menjumlahkan elemen-elemen yang seletak.

contoh :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+6 & 2+8 \\ 4+4 & 3+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b. Pengurangan matriks

Pengurangan matriks hanya dapat dilakukan pada matriks yang ordonya sama dengan cara mengurangkan elemen yang seletak.

$$\begin{aligned} \mathbf{J} - \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-2 & 2-4 & 3-6 \\ 6-1 & 5-3 & 4-8 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c. Perkalian matriks dengan skalar

jika $k.A$ berarti mengalikan setiap elemen matriks A dengan k

$$k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

d. Perkalian dua matriks

Hanya dapat dilakukan apabila banyak kolom matriks A sama dengan banyak baris matriks B . (baris kali kolom)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Invers Matriks

a. Invers matriks ordo 2

Contoh invers matriks

$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ Carilah invers dari matriks A

Jawab :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4 \times 7 - 9 \times 3} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{28 - 27} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Jika determinan sebuah matriks = 0, maka matriks tersebut tidak mempunyai invers (singular)

b. Invers matriks ordo 3

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)$$

i. Determinan matriks bujur sangkar ordo 3

CARA SARRUS

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$
$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

ii. Cara ekspansi kofaktor

minor(M) dan kofaktor (C)

Contoh: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16, C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 16$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26, C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -26$$

iii. Adjoint matriks bujur sangkar ordo 3

$$\text{adj}(A) = C^T = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

5. Aplikasi Matriks

- a. Menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dengan metode invers matriks**

$$\text{Jika } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ maka } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot X = B, X = A^{-1} \cdot B$$

$$X \cdot A = B, X = B \cdot A^{-1}$$

- b. Menentukan penyelesaian sistem persamaan linear dengan metode determinan

Metode Determinan

Contoh

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -4 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

Jawab

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 6 - 12 - (9 + 2 + 4) = -22$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -3 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 10 & 2 & 1 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 20 - 18 - (30 - 8 + 6) = -22$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -3 & 1 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 10 & 1 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 3 - 12 - 60 - (-27 + 10 - 8) = -44$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 10 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10 + 18 - 16 - (12 + 6 + 40) = -66$$

TRANSFORMASI GEOMETRI

Pencerminan	$M x = a$	$P' (2a - x, y)$
	$M y = b$	$P' (x, 2b - y)$
	$M x$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
	$M y$	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
	$M y = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
	$M y = -x$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
	$M y = mx$	$\begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{m^2-1}{1+m^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ atau $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $m = \tan \theta$
	$M y = mx + c$	$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}$
Rotasi	$R [(a,b), \theta]$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
Dilatasi	$[(a,b), k]$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$
Gusuran	$G x$	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid k > 0 \text{ kanan} \mid k < 0 \text{ kiri}$
	$G y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid k > 0 \text{ atas} \mid k < 0 \text{ bawah}$
Regangan	$S x$	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid k > 0 \text{ kanan} \mid k < 0 \text{ kiri}$
	$S y$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid k > 0 \text{ atas} \mid k < 0 \text{ bawah}$

Rotasi sejauh 180 = Pencerminan terhadap titik O

Transformasi T_1 dilanjutkan T_2 ditulis dengan $T_2 \circ T_1$

Jika $T_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $T_2 = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}$ maka $T_2 \circ T_1 = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$L' = |ad - bc| \cdot L$$

$$L_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

Induksi Matematika

1. Sifat notasi sigma

Sifat-sifat Notasi Sigma

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{j=1}^n U_j$$

$$\sum_{i=1}^n (U_i \pm V_i)^2 = \sum_{i=1}^n U_i^2 \pm 2 \sum_{i=1}^n U_i V_i \pm \sum_{i=1}^n V_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n k = n \cdot k, \quad k = \text{konstanta}$$

$$\sum_{i=1}^c U_i + \sum_{i=c+1}^n U_i = \sum_{i=1}^n U_i$$

$$\sum_{i=1}^n k \cdot U_i = k \cdot \sum_{i=1}^n U_i, \quad k = \text{konstanta}$$

$$\sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1-p}^{n-p} U_{i+p} = \sum_{i=1+p}^{n+p} U_{i-p}$$

$$\sum_{i=1}^n (U_i \pm V_i) = \sum_{i=1}^n U_i \pm \sum_{i=1}^n V_i$$

$$\sum_{i=k}^m U_i = \sum_{i=1}^{m-k+1} U_{i+k-1}$$

2. Pembuktian Dengan Induksi matematika (langsung)

- Tahap 1: Tunjukkan bahwa $S(n)$ benar untuk $n = 1 \rightarrow S(1)$ benar
- Tahap 2: Anggap bahwa $S(n)$ benar untuk $n = k \rightarrow S(k)$ benar
- Tahap 3: Tunjukkan bahwa $S(n)$ juga benar untuk $n = k + 1 \rightarrow S(k+1)$ benar

Contoh :

Buktikan $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$, untuk setiap n bilangan asli.

Langkah Pertama :

Akan ditunjukkan $n=(1)$ benar

$$2 = 1(1 + 1)$$

Jadi, $S(1)$ benar

Langkah Kedua :

Asumsikan $n=(k)$ benar yaitu

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k + 1),$$

Langkah Ketiga

Akan ditunjukkan $n=(k + 1)$ juga benar, yaitu

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 1 + 1)$$

Dari asumsi :

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k + 1)$$

Tambahkan kedua ruas dengan u_{k+1} :

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = k(k + 1) + 2(k + 1)$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 1 + 1)$$

Jadi, $n = (k + 1)$ benar

3. Pembuktian tidak langsung

a. Kontraposisi

Pernyataan implikasi ($p \rightarrow q$) akan ekuivalen dengan kontraposisinya ($\sim p \rightarrow \sim q$). Sehingga jika membuktikan kontraposisinya benar, maka secara tidak langsung, pernyataan implikasi juga benar.

CONTOH :

Jika $3n+2$ bilangan ganjil, maka n bilangan ganjil. Buktikan!

Jawab :

p : $3n + 2$ bilangan ganjil

q : n bilangan ganjil

Bentuk ini sulit jika dibuktikan secara langsung, oleh karena itu kita buktikan dengan tidak langsung.

Apa cirinya bentuk ini sulit? Bentuk pernyataan p lebih kompleks dari pernyataan q , ini hanya ciri umum dan tidak selalu seperti itu, tapi kebanyakan demikian.

$\sim p$: $3n + 2$ bilangan genap

$\sim q$: n bilangan genap

Bentuk kontraposisinya $\sim q \rightarrow \sim p$: "jika n bilangan genap, maka $3n + 2$ bilangan genap"

Kita buktikan pernyataan kontraposisinya, jika terbukti benar maka pernyataan yang disoal juga benar, prosesnya sama seperti pembuktian langsung (pembuktian implikasi).

Kita anggap $\sim q$ benar, yaitu $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$ (genap)

$$\begin{aligned} 3n + 2 &= 3n + 2 \\ &= 3(2k) + 2 \\ &= 2(3k) + 2 \\ &= 2(3k + 1) \end{aligned}$$

$$3n + 2 = 2m, m \in \mathbb{Z}^+$$

Pembuktian hasil kontraposisinya adalah benar yaitu $3n + 2$ bilangan genap.

Artinya pernyataan "jika $3n + 2$ bilangan ganjil, maka n bilangan ganjil" adalah benar.

b. Kontradiksi

Sebuah pernyataan berupa implikasi $p \rightarrow q$ memiliki kebalikan negasi $\sim(p \rightarrow q)$. Jika implikasi benar, maka negasi salah begitu juga dengan sebaliknya. Pembuktian ini akan membuktikan bahwa negasi salah sehingga implikasi benar.

Untuk membuktikan negasi salah, awalnya kita harus mengasumsikan bahwa negasi itu benar,

Contoh :

Jika $3n+2$ bilangan ganjil, maka n bilangan ganjil. Buktikan!

Jawab :

p : $3n + 2$ bilangan ganjil

q : n bilangan ganjil

$\sim q$: n bilangan genap

Akan dibuktikan $p \rightarrow q$ benar.

Asumsikan $p \wedge \sim q$ benar, yaitu $3n + 2$ bilangan ganjil dan n bilangan genap.

Sekarang kita buktikan asumsinya. Diketahui $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$ (genap)

$$\begin{aligned} 3n + 2 &= 3n + 2 \\ &= 3(2k) + 2 \\ &= 2(3k) + 2 \\ &= 2(3k + 1) \end{aligned}$$

$$3n + 2 = 2m, m \in \mathbb{Z}^+$$

Hasilnya adalah bilangan genap, padahal asumsi semulanya adalah bilangan ganjil. Terjadilah kontradiksi di sini. Dengan pernyataan bahwa negasi salah, maka implikasi benar.